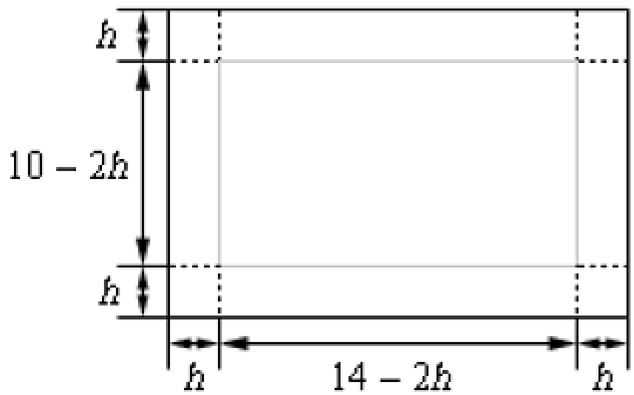
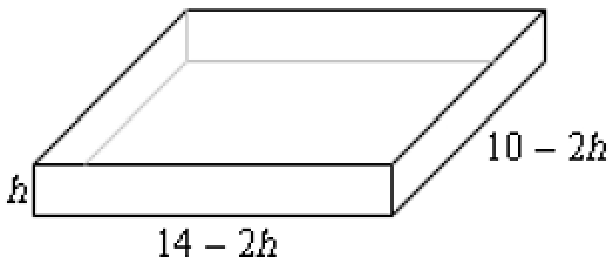
بهینه سازی بیشترین حجم با روش آزمون مشتق اول

ما می خواهیم یک تکه مقوای نازک که ابعاد آن ۱۴ در ۱۲ اینچ می باشد را به صورت شکل زیر از هم جدا کنیم



سپس با توجه به شکل ایجاد شده لبه ها را به سمت بالا تا کنیم تا جعبه ای به شکل زیر تولید شود:



هدف تعیین بلندی h می باشد به طوری که جعبه بیشترین حجم را داشته باشد.

حل مسئله:

این مسئله را می توان از دو روش حل کرد یکی روش بازه بسته یا closed interval و یکی هم آزمون مشتق اول که در این گزارش به روش اول می پردازیم و در گزارش بعدی به روش دوم برای همین مسئله خواهیم پرداخت.

اولین کاری که باید بعد از تشخیص شکل و رسم آن انجام داد به دست آوردن مدل ریاضی مسئله می‌باشد که داریم:

$$\text{Maximize: } V = h(14 - 2h)(10 - 2h) = 140h - 48h^2 + 4h^3$$

که با توجه به اینکه پهنا عددی مثبت است پس :

$$10 - 2h \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad 10 \geq 2h \quad \Longrightarrow \quad 5 \geq h$$

که h نیز خودش مثبت است پس محدوده h خواهد بود: $0 \leq h \leq 5.$

حال به دنبال پیدا کردن اکسترمم مطلق این تابع هزینه می باشیم که با این روش بیشینه حجم را به دست خواهیم آورد:

آزمون مشتق اول:

با توجه به گزارش های قبلی و توضیح در مورد این روش مشتق تابع هزینه خواهد شد:

$$V'(h) = (140h - 48h^2 + 4h^3)' = 140h' - 48(h^2)' + 4(h^3)' = 140 - 48 \cdot 2h + 4 \cdot 3h^2 = 140 - 96h + 12h^2$$

حال برای پیدا کردن نقاط بحرانی کافیست معادله درجه دوم بالا را حل کنیم که خواهیم داشت:

$$140 - 96h + 12h^2 = 0 \implies h = \frac{-(-96) \pm \sqrt{(-96)^2 - 4 \cdot 12 \cdot 140}}{2 \cdot 12} = \frac{12 \pm \sqrt{39}}{3} \approx 1.9183,\ 6.0817$$

که با توجه به اینکه $0 \leq h \leq 5$ پس فقط مقدار زیر قابل قبول است:

$$h = \frac{12 - \sqrt{39}}{3} \approx 1.9183.$$

با توجه به آزمون مشتق اول آسان است اینکه نشان دهیم $V'(\mathrm{h}) > 0$ برای هر $h < \frac{12-\sqrt{39}}{3}$ و $V'(\mathrm{h}) < 0$ برای هر $h > \frac{12-\sqrt{39}}{3}$ در بازه مورد نظر ما یعنی: $[0,5]$

پس با این روش بیشترین حجم در بلندای $h = \frac{12-\sqrt{39}}{3}$ اتفاق می افتد که عبارت است از:

$$120.1644\ \mathrm{in}^3$$